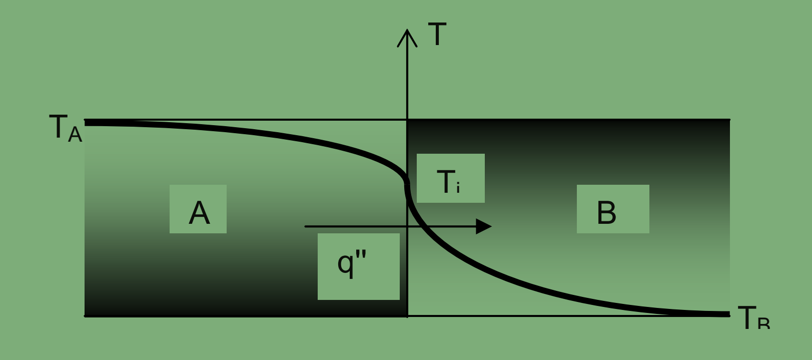
# TRANSFERENCIA DE CALOR: CONDUCCIÓN TRANSITORIA

*por*

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI




CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
*ARQUITECTURA*
*DE MADRID*

3-89-05

# TRANSFERENCIA DE CALOR: CONDUCCIÓN TRANSITORIA

*por*

LUIS MANUEL MOCHÓN CASTRO
DANILO MAGISTRALI

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
*ARQUITECTURA*
*DE MADRID*

3-89-05

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

**NUMERACIÓN**

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

**TEMAS**

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

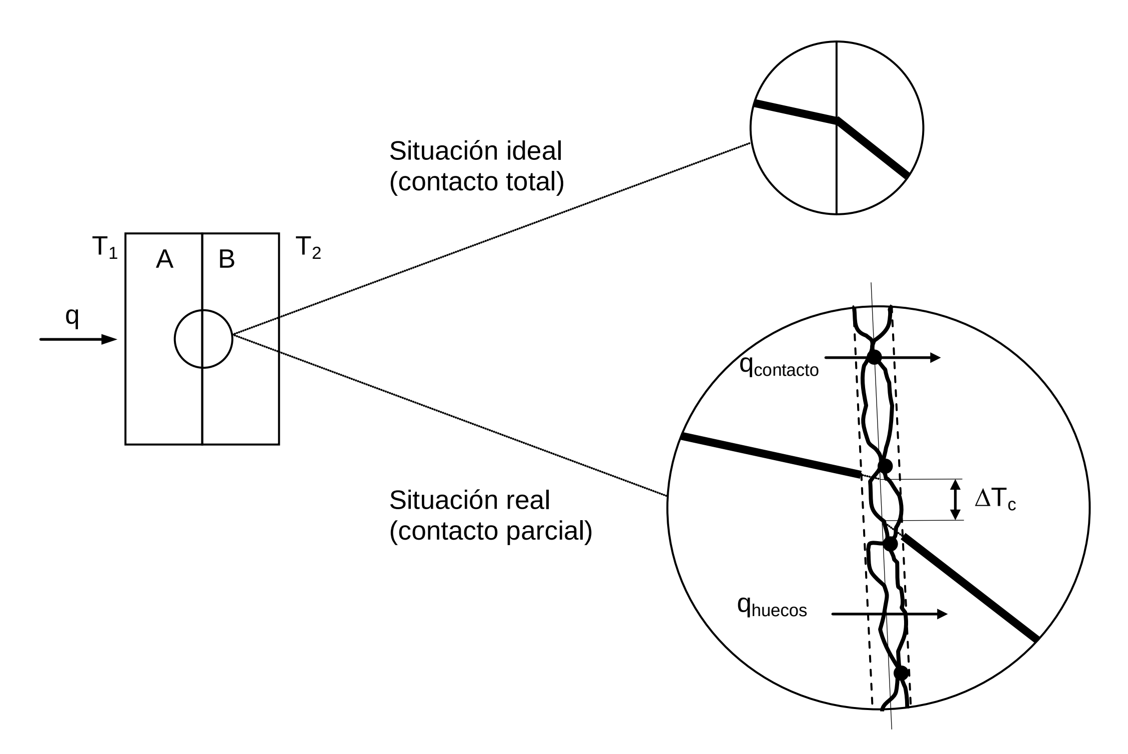
***Transferencia de calor: conducción transitoria.***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestión y portada: Almudena Gil Sancho.
CUADERNO 398.01 / 3-89-05
ISBN-13 (obra completa): 978-84-9728-452-3
ISBN-13: 978-84-9728-457-8
Depósito Legal: M-13381-2013

# Índice

## 1. RESISTENCIA DE CONTACTO

Cuando existe un flujo calorífico entre dos cuerpos en contacto se observa una caída de temperatura $\Delta T_c$ en las proximidades de la unión debido a que la rugosidad de ambas superficies impide el contacto total. En la unión se distinguen puntos de contacto y huecos que quedan generalmente llenos de aire, aunque podrían rellenarse de cualquier otra sustancia; e incluso en algunas aplicaciones se hace el vacío.

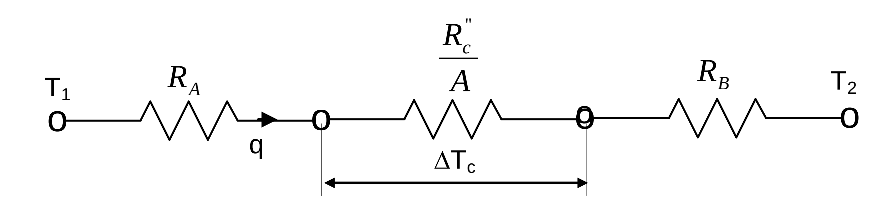



Esta irregularidad de la unión da lugar a una resistencia térmica denominada resistencia de contacto (normalmente por unidad de área) $R_c''$, definida como:

$$q'' = \frac{\Delta T_c}{R_c''}$$

o bien:

$$q = q'' A = \frac{\Delta T_c}{\frac{R_c''}{A}}$$




Por simple análisis dimensional, resulta $[R_c''] = m^2 K / W$ .

El calor a través de la superficie de contacto se transfiere por diferentes modos:

- *Puntos de contacto*: por conducción, que no necesariamente tiene que ser unidimensional, pues los planos de contacto puntual no siempre son paralelos a la superficie de unión de los cuerpos.

- *Huecos*: a través del gas por conducción, o por convección cuando la diferencia de temperaturas entre las caras del hueco es elevada, pudiendo aparecer incluso radiación si dicha temperatura es suficientemente alta. Se recuerda que la diferencia de temperaturas entre las caras de una pared cualquiera crece con la potencia transmitida, esto es, $T_1 - T_2 = Rq$, donde R representa la resistencia de dicha pared. Un efecto similar ocurre con las caras de los huecos, esto es, tanto mayor potencia transmitida a través de la pared hace aumentar la diferencia de temperatura entre ambas caras del hueco.

  Dada la baja conductividad de los gases, la resistencia térmica de los huecos suele ser la dominante en la resistencia de contacto.

Los factores que tienden a reducir la resistencia de contacto son:

- Una baja rugosidad de las superficies, por favorecer el contacto.

- La elevación de la presión de la unión por aumentar los puntos de contacto, efecto que se ve significativamente mejorado cuando se alcanza el límite de fluencia de alguno de los materiales, lo que da lugar a una reducción considerable de los huecos.

- El relleno de los huecos con alguna sustancia de alta conductividad térmica (es muy habitual el uso de siliconas conductivas).

- La potencia transmitida a través de las paredes que se unen, pues según se ha visto esto afecta a la diferencia de temperartura de las caras de los huecos. Con el aumento de tal diferencia de temperatura se van poniendo en marcha nuevos mecanismos de transferencia en los huecos (inicialmente conducción, posteriormente convección y finalmente convección y radiación).

La resistencia de contacto puede ser la resistencia dominante cuando se realizan uniones de materiales de alta conductividad, como plata, cobre, oro o aluminio, lo cual suele ser habitual en la industria aeronáutica y en electrotecnia.

Algunas consecuencias de la existencia de la resistencia de contacto son:

- En sistemas de aislamiento reduce las pérdidas o ganancias de calor por lo que resulta favorable, aunque en estas aplicaciones nunca se juega con la resistencia de contacto para conseguir el nivel de aislamiento requerido.

- En sistemas de intercambio energético resulta perjudicial pues:

  - si la potencia térmica transferida está fijada, la resistencia de contacto aumenta la temperatura máxima de la parte más caliente.

  - si el salto térmico entre focos está determinado, la resistencia de contacto supone una merma en la potencia transferida.

Algunos sistemas que permiten reducir la resistencia térmica de contacto son:

- Si no se pretende una unión permanente: mediante grasas conductoras (silicona conductiva), láminas de metales blandos (plomo, plata, estaño, etc).

- Cuando se requiere una unión permanente: mediante pegado o con soldadura.

Algunos valores típicos de la resistencia de contacto a presiones moderadas y con los acabados usuales se dan en la tabla siguiente:

| Materiales | $\frac{1}{R_c^{''}}\ [m^2 \cdot K/W]$ |
|---|---|
| Cerámica-cerámica | 500-3000 |
| Cerámica-metal | 1500-8500 |
| Grafito-metal | 3000-6000 |
| Acero inoxidable-acero inoxidable | 1700-3700 |
| Aluminio-aluminio | 2200-12000 |
| Acero inoxidable-aluminio | 3000-4500 |
| Cobre-cobre | 10000-25000 |
| Aluminio rugoso-aluminio (condiciones de vacío) | ~ 150 |
| Hierro-aluminio | 4000-40000 |

2. **ESPESOR CRÍTICO DE RECUBRIMIENTO**

Sea una tubería (figura 1) de radios interior y exterior $r_1$ y $r_2$ respectivamente y conductividad $k$, por cuyo interior circula un fluido a temperatura $T_i$ con coeficiente de convección $h_i$. La tubería se recubre hasta el radio $r_3$ con un material de conductividad $k_a$. Externamente hay otro fluido a temperatura $T_e$ y coeficiente de convección $h_e$. Se pretende analizar la evolución de la potencia calorífica q que se transfiere a través de las paredes al ir variando el espesor del recubrimiento. Dicha potencia está dada por:

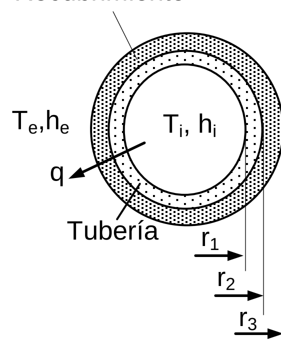



Figura 1

$$q = \frac{T_i - T_e}{R_{ie}} = \frac{T_i - T_e}{\dfrac{1}{h_i 2\pi r_1 L} + \dfrac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi k L} + \dfrac{\ln \frac{r_3}{r_2}}{2\pi k_a L} + \dfrac{1}{h_e 2\pi r_3 L}}$$

Puede observarse cómo en la medida que crece el radio exterior $r_3$ del recubrimiento aumenta la resistencia conductiva $\dfrac{\ln r_3/r_2}{2\pi k_a L}$, al tiempo que disminuye la resistencia convectiva $1/h_e 2\pi r_3 L$. Ante esta situación cabe preguntarse si existirá algún espesor de recubrimiento que haga mínima la pérdida de calor. Tomando derivadas de $q$ o de $R_{ie}$, pues el término $T_i$-$T_e$ permanece constante, respecto de $r_3$ e igualando a cero:

$$\frac{dR_{ie}}{dr_3} = \frac{d}{dr_3}\left\{\frac{\ln r_3/r_2}{2\pi k_a L} + \frac{1}{h_e 2\pi r_3 L}\right\} = \frac{1}{2\pi L}\left\{\frac{1}{k_a r_3} - \frac{1}{h_e r_3^2}\right\} = 0$$

de donde se obtiene que $r_3\Big|_{\frac{dR_{ie}}{dr_3}=0} = r_c = \dfrac{k_a}{h_e}$, al que se denomina radio crítico. La segunda derivada de la resistencia en $r_c$ vale:

$$\left.\frac{d^2 R_{ie}}{dr_3^{\,2}}\right|_{r_3=r_c} = \left.\frac{1}{2\pi L}\left\{-\frac{1}{k_a r_3^2} + \frac{2}{h_e r_3^2}\right\}\right|_{r_3=r_c} = \frac{1}{2\pi L} > 0$$

que al ser positiva indica que la resistencia térmica es mínima para $r_3$=$r_c$ y, por tanto, la potencia térmica transferida máxima, en contra de lo previsto inicialmente. En términos del espesor $e$ de recubrimiento, el espesor crítico se define como:

$$e_c = r_c - r_2$$

Por un procedimiento análogo, se comprueba que el radio crítico para una pared esférica es el doble que en la pared cilíndrica, esto es $r_c = 2\dfrac{k_a}{h_e}$. Estos resultados tienen implicaciones distintas según se emplee el recubrimiento con función aislamiento o disipación:

a. <u>*Función aislamiento*</u>: tiene por objeto reducir el flujo de potencia con el exterior. Tal es el caso del transporte por tuberías de fluidos calientes (flujo de calor hacia el exterior) o fríos (flujo hacia el interior).

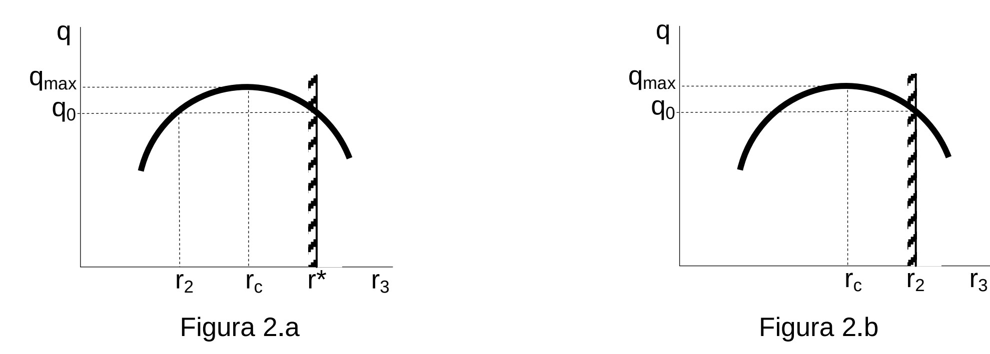



Figura 2.a Figura 2.b

En la figura 2.a se puede apreciar cómo cuando el radio crítico es superior al radio exterior de la tubería ($r_c>r_2$) la adición de recubrimiento aumenta el flujo de calor si $r_3<r^*$, o lo disminuye si $r_3>r^*$, respecto al calor $q_0$ evacuado en ausencia de recubrimiento. $r^*$ representa el radio de recubrimiento que iguala a la potencia calorífica sin recubrimiento. Evidentemente, la función aislamiento exigirá como solución válida $r_3>r^*$, pues es la que hace disminuir la potencia calorífica respecto a la que tiene lugar inicialmente, $q_0$. En esta zona la adición de espesores tanto mayores reducirá tanto más la potencia calorífica intercambiada.

Cuando el radio crítico $r_c$ es menor que el radio exterior $r_2$ de la tubería (figura 2.b), la adición de cualquier espesor de recubrimiento siempre disminuirá el flujo de calor, tanto más cuanto mayor sea su espesor.

*b.* <u>*Función disipación*</u>: permite reducir la temperatura máxima de un cuerpo que disipa una potencia calorífica dada, como ocurre en refrigeración de componentes eléctricos y electrónicos.

Considérese que en la configuración de partida se sustituye la tubería por un elemento eléctrico macizo de radio $r_2$ (figura 3.a), que disipa una potencia $q$, y cuya temperatura máxima es $T_i$.

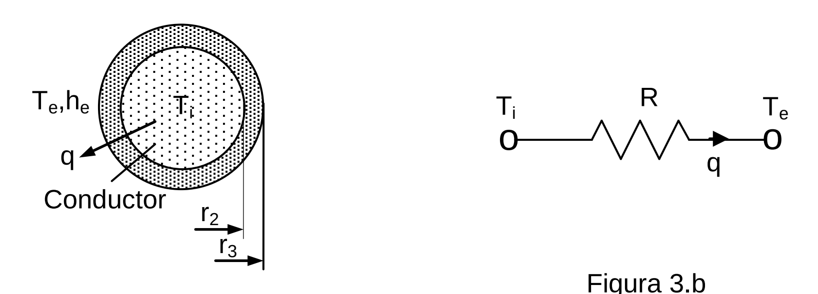



Figura 3.a Figura 3.b

Haciendo uso de un modelo de resistencias térmicas (figura 3.b), la temperatura máxima del elemento se puede expresar como:

$$T_i = T_e + q\,R_{ie}$$

donde $R = R_{conductor} + \dfrac{\ln r_3/r_2}{2\pi k_a L} + \dfrac{1}{h_e 2\pi r_3 L}$ representa la resistencia térmica total entre los puntos *i* y *e*, la cual debe presentar un mínimo en $r_3=r_c=k_a/h_e$.

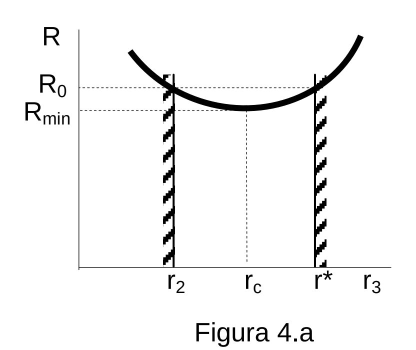


Figura 4.a

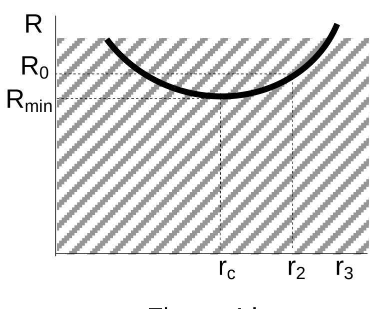


Figura 4.b

Al objeto de reducir la temperatura máxima del componente, las únicas soluciones válidas son aquellas en las que la resistencia total $R_{ie}$ con recubrimiento es menor que sin él ($R_0$), pues de lo contrario la temperatura máxima del componente sería superior con recubrimiento. Por tanto, cuando $r_c>r_2$ (figura 4.a) $r_3$ debe cumplir $r_2<r_3<r^*$, requiriéndose menor espesor de recubrimiento en el rango $r_2<r_3<r_c$ que en $r_c<r_3<r^*$. Es inmediato que la solución óptima está justo en $r_3=r_c$, para la cual la temperatura máxima del componente alcanza su valor más pequeño, por serlo $R_{ie}$.

Para $r_c<r_2$ no hay solución posible, pues la adición de cualquier espesor de recubrimiento haría aumentar la temperatura máxima del elemento.

Se analiza a continuación la adecuación geométrica de materiales aislantes y no aislantes para el recubrimiento de cuerpos de forma cilíndrica de distinto tamaño con funciones aislamiento y disipación. Se considerará que un recubrimiento es adecuado desde el punto de vista geométrico cuando el espesor requerido sea como máximo del orden del tamaño del cuerpo que se recubre. Para ello nos apoyaremos en los radios críticos $r_c=k_a/h_e$ mostrados en la tabla siguiente, que contempla diferentes materiales (aislantes y no aislantes) con convección natural y forzada en aire:

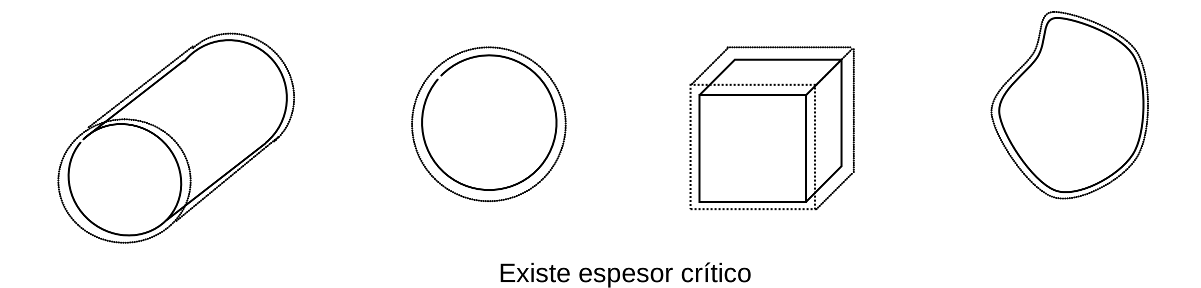
| | Aislante $k_a$~0,1 W/m·K | No aislante $k_a$~10 W/m·K |
|---|---|---|
| Convección natural con aire $h_e$~10 W/m$^2$·K | 0,01 m | 1 m |
| Convección forzada con aire $h_e$~100 W/m$^2$·K | 0,001 m | 0,1 m |

De los resultados de la tabla se deduce que:

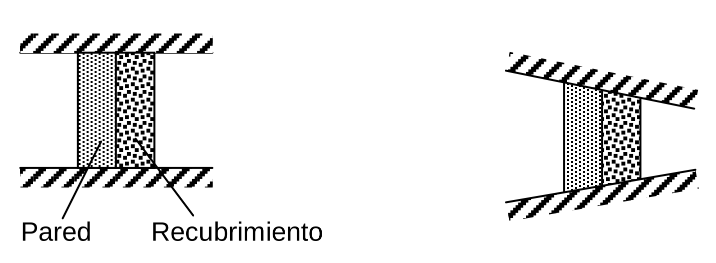
- Materiales aislantes: apropiados como recubrimiento en cuerpos de pequeño y de gran tamaño (l~1 cm y l~1 m, respectivamente), tanto en función aislamiento como disipación.

- Materiales no aislantes: apropiados como recubrimiento sólo en cuerpos de gran tamaño (l~1 m), tanto en función aislamiento como disipación.

El espesor crítico no es exclusivo de las configuraciones cilíndricas o esféricas, sino de todas aquellas en las que la adición de recubrimiento suponga un aumento del área de convección exterior:



Existe espesor crítico




No existe espesor crítico

Cada configuración susceptible de tener espesor crítico, tiene su propia expresión de dicho espesor crítico, pudiéndose hablar de radio crítico sólo en cilindros y esferas.

Resumen: el recubrimiento crítico ofrece una mejora en la refrigeración de componentes con generación interna y llama la atención sobre el cuidado que hay que llevar cuando se recubren elementos con función aislamiento, pues la potencia térmica puede aumentar en lugar de reducirla.

## 3. **CONDUCCIÓN TRANSITORIA CON RESISTENCIA INTERNA DESPRECIABLE**

Hay determinados transitorios de calentamiento o enfriamiento de un cuerpo en los que puede considerarse que todo él se encuentra a temperatura uniforme. En estos casos se puede emplear un método aproximado para calcular la ley temporal de temperatura denominado Modelo de la Resistencia Interna Despreciable (MRID).

Supóngase una placa plana de conductividad k, espesor L y temperaturas extremas $T_1$ y $T_2$ en contacto con un fluido a temperatura $T_\infty < T_2$. El calor que atraviesa la placa puede determinarse como:

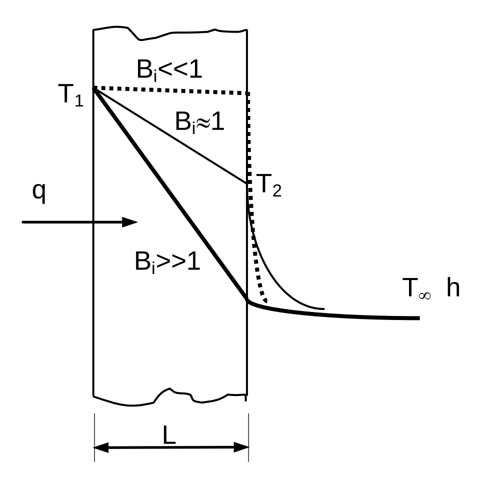



Figura 1. Efecto del número del número de Biot en la distribución de temperatura en una pared plana en régimen permanente.

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\frac{L}{kA}} = \frac{T_2 - T_\infty}{\frac{1}{hA}}$$

Si se quiere cuantificar el cociente entre la diferencia de temperatura en el cuerpo ($\Delta T_{solido}=T_1-T_2$) y en el fluido ($\Delta T_{fluido}=T_2-T_\infty$):

$$\frac{\Delta T_{sólido}}{\Delta T_{fluido}} = \frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_\infty} = \frac{\frac{L}{kA}}{\frac{1}{hA}} = \frac{R_{conductiva-sólido}}{R_{convectiva}} = \frac{hL}{k_{sólido}} = Bi \qquad (3.1)$$

siendo $B_i$ el número de Biot, definido como el cociente entre las resistencias térmicas de conducción (en el sólido) y de convección. Bi da idea de la caída de temperatura en el sólido ($T_1$-$T_2$) respecto a la que tiene lugar en el fluido ($T_2$-$T_\infty$). La figura 1 recoge diferentes situaciones según el número de Biot. Puede observarse cómo $\Delta T_{solido}$ es despreciable frente a $\Delta T_{fluido}$ cuando Bi es muy pequeño, mientras que ocurre lo contrario ($\Delta T_{fluido}$ insignificante frente a $\Delta T_{solido}$) cuando Bi es elevado. Con valores intermedios de Bi, ni $\Delta T_{solido}$ ni $\Delta T_{fluido}$ resultan despreciables, verificándose que $\Delta T_{solido} \approx \Delta T_{fluido}$ si $Bi \approx 1$.

Durante un transitorio de calentamiento o enfriamiento de un cuerpo su temperatura cambia en el tiempo y de un punto a otro en una cantidad que depende de Bi. La figura 2 muestra la evolución de la temperatura de una pared que se enfría desde una temperatura inicial $T_0$. Durante todo el proceso está en contacto con un fluido a temperatura $T_\infty < T_0$. Se observa cómo si Bi es pequeño se puede considerar que dentro del cuerpo la temperatura es prácticamente uniforme y, por tanto, $T(\vec{r},t) \approx T(t)$, pudiéndose determinar de forma aproximada la ley temporal de la temperatura del cuerpo mediante el denominado Modelo de la Resistencia Interna Despreciable (RID), que se estudia más adelante. Cuando Bi no es pequeño (tanto si está próximo a la unidad como si es mayor que 1), el cálculo $T(\vec{r},t)$ del sólido es más complejo, y escapa del ámbito de este capítulo.

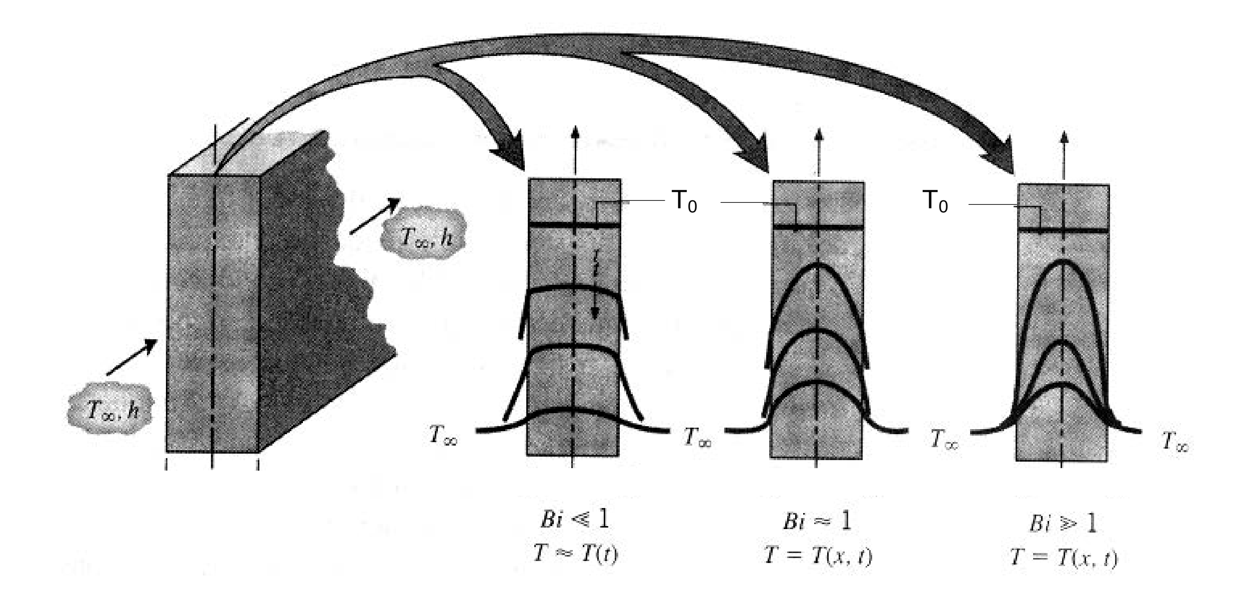



Figura 2. Efecto del número del número de Biot en la distribución de temperatura durante el enfriamiento de una pared plana en un entorno convectivo.

### *Modelo RID*

Permite determinar la ley de temperatura en el tiempo T(t) de un cuerpo (en calentamiento o enfriamiento) siempre que pueda considerase que internamente dicha temperatura es uniforme (no hay diferencia significativa de unos puntos a otros). Aplicando el Primer Principio a un sólido que satisface esta condición:

$$q_{entra} + q_{genera} = q_{sale} + \dot{W} + \dot{U}_{sistema} \qquad (3.2)$$

siendo:

$\dot{W}$ Potencia mecánica desarrollada por el cuerpo. En transferencia de calor este término está dado por el trabajo de expansión, pudiendo despreciarse dado el pequeño valor del coeficiente de dilatación de los sólidos.

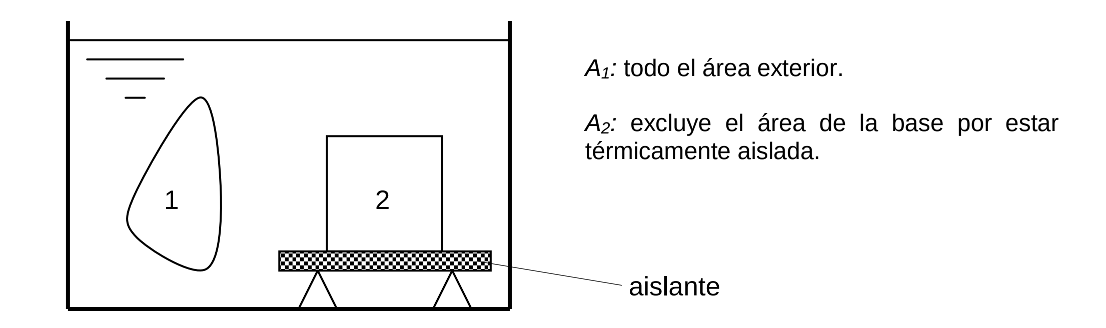
$\dot{U}_{sistema} = m\,c\dfrac{\partial T}{\partial t} = \rho\,V\,c\dfrac{\partial T}{\partial t}$ Ritmo al que varía la energía interna del cuerpo de densidad ρ, volumen V, calor específico *c* y temperatura *T*.

Estudiemos el caso típico de un cuerpo que experimenta un enfriamiento desde una temperatura inicial $T_0$ en un medio fluido a temperatura $T_\infty$ ($<T_0$) con un coeficiente de convección h y sin fuentes ni sumideros internos de calor. La ecuación (2) toma la forma:

$$0 = hA\left(T - T_\infty\right) + \rho\,V\,c\frac{dT}{dt}$$

ci: $T(t=0)=T_0$

donde A representa el área de transferencia de calor por convección.




*$A_1$:* todo el área exterior.

*$A_2$:* excluye el área de la base por estar térmicamente aislada.

Realizando el cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \quad \rightarrow \quad dT = d\theta$$

la ED queda como:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{hA}{\rho Vc}\theta$$

ci: $\theta\,(t=0)=T_0-T_\infty=\theta_0$

Integrando:

$$\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\theta} = -\int_0^t \frac{hA}{\rho Vc}dt = -\frac{\bar{h}A}{\rho Vc}\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0} = -\frac{\bar{h}A}{\rho Vc}t$$

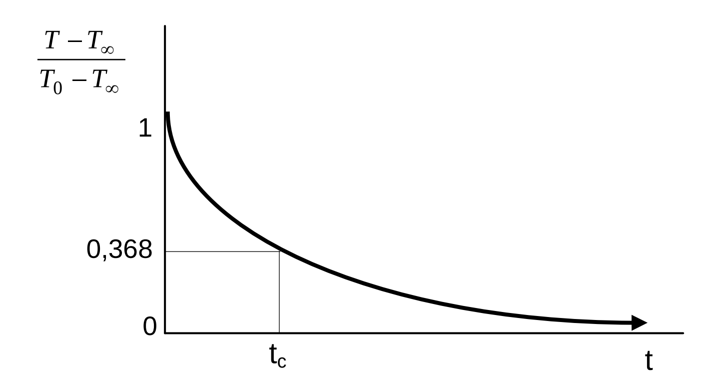
y por tanto:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{\bar{h}A}{\rho Vc}t}$$

donde $\bar{h}$ representa el valor medio del coeficiente de convección entre $T_0$ y la temperatura final del cuerpo. La ecuación anterior puede ponerse en la forma:

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = e^{-\frac{t}{t_c}} \qquad (3.3)$$

siendo $t_c = \frac{\rho V c}{\bar{h} A}$ la denominada constante de tiempo del proceso, cuyo significado es el del tiempo necesario para que la diferencia de temperatura T-$T_\infty$ caiga hasta el 36,8% de la diferencia inicial $T_0$-$T_\infty$. Gráficamente la ley de temperatura es:




La constante de tiempo también puede expresarse como $t_c = \frac{\rho\, c\, L_c}{\bar{h}}$, donde $L_c = \frac{V}{A}$ es la longitud característica, definida como el cociente entre el volumen V del cuerpo y el área A de transferemncia de calor.

La ecuación (3) también es válida para describir el transitorio de un cuerpo cuando además de la convección exista intercambio por radiación con el entorno. Para ello será preciso que la superficie radiante evolvente tenga la misma temperatura ($T_e$) que el fluido ($T_\infty$) y que dicha superficie evolvente sea muy grande comparada con el cuerpo objeto de estudio. En tal caso $\bar{h}$ debería tomarse como la suma de los coeficientes medios de convección $\bar{h}_c$ y radiación $\bar{h}_r$, esto es: $\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r$ .

A pesar de que el uso del valor medio de $\bar{h}$ en las ecuaciones anteriores da, en general, un buen grado de aproximación en la descripción del transitorio, siempre que sea posible deberá plantearse e integrarse una ecuación diferencial que no use estos u otros valores medios. En el epígrafe siguiente se presenta un ejemplo de esto (caso 2).

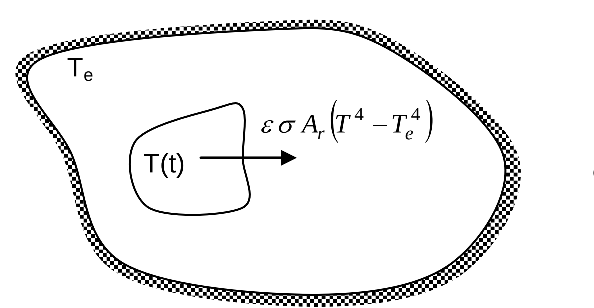
## *VALIDEZ DEL MRID*

Cuantitativamente el MRID es aplicable siempre que $B_i = \frac{\bar{h} L_C}{k} < 0{,}1$ ($\bar{h}$ coeficiente de convección y radiación medio, k conductividad del cuerpo, $L_C$ longitud característica). La definición de longitud característica como $L_c = \frac{V}{A}$ permite utilizar el MRID con cuerpos de forma cualesquiera, ya sean regulares o irregulares.

Otras situaciones distintas del transitorio con condición de contorno convectiva, vista anteriormente, son:

Caso 2:

- Ausencia de convección ($h_c$=0), esto es, cuerpo en el vacío.
- Existe intercambio radiativo con una superficie evolvente exterior a temperatura $T_e$, de mucho mayor tamaño que el cuerpo y supuesto ambos cuerpos grises difusos.




$$\varepsilon\,\sigma\,A_r\left(T^4-T_e^4\right)+\rho V c\frac{dT}{dt}=0$$

ci: T(t=0)=$T_0$

Separando variables:

$$\frac{\varepsilon\,\sigma\,A_r}{\rho V c}\int_0^t dt=-\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T^4-T_e^4}$$

Evaluando ambas integrales $\left\{\int\frac{dx}{x^4-a^4}=\frac{1}{4a^3}\ln\frac{x-a}{x+a}-\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}\right\}$ y ordenando:

$$t=-\frac{\rho V c}{4\varepsilon A_r\sigma T_e^3}\left\{\ln\left(\frac{T-T_e}{T+T_e}\right)-\ln\left(\frac{T_0-T_e}{T_0+T_e}\right)-2\left[arctg\left(\frac{T}{T_e}\right)-arctg\left(\frac{T_0}{T_e}\right)\right]\right\} \quad (3.4)$$

ecuación que no permite evaluar explícitamente *T* en función de *t*, $T_0$ y $T_e$, ni puede ser usada cuando $T_e$=0 (radiación al espacio profundo).

Para $T_e$=0, la resolución de la integral anterior queda como:

$$T=\sqrt[3]{\frac{1}{\frac{1}{T_0^3}+\frac{3\varepsilon\,\sigma\,A_r}{\rho Vc}t}}$$

El número de Biot asociado a este proceso sería:

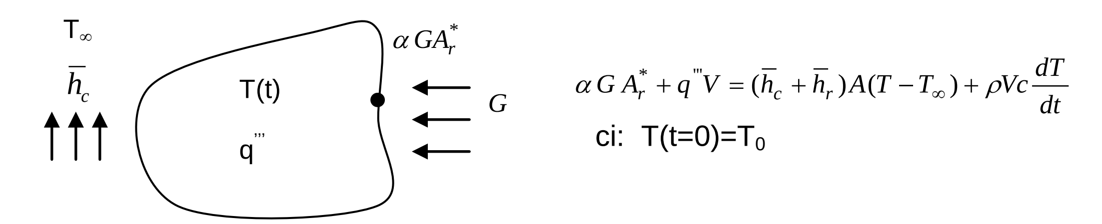
$$B_i=\frac{R_{CONDUCCIÓN}}{R_{RADIACIÓN}}=\frac{\overline{h}_r L_c}{k}$$

donde $\overline{h}_r=\varepsilon\,\sigma\left(\overline{T}^2+T_e^2\right)\left(\overline{T}+T_e\right)$.

Caso 3:

- Existe convección con coeficiente medio $\overline{h}_c$ con un fluido a temperatura $T_\infty$. El área convectiva es $A_c$.
- Existe intercambio radiativo con una superficie evolvente exterior a temperatura $T_e$, igual a la del fluido ($T_e=T_\infty$), siendo las áreas de transferencia de calor por convección $A_c$ y radiación $A_r$ iguales ($A_c=A_r=A$). La superficie radiante evolvente es mucho más grande que el cuerpo en cuestión.

- Existe fuente de radiación puntual (foco, radiación solar, etc) con irradiancia G [W/m$^2$], que incide sobre una superficie $A_r^*$, cuya absortancia a esta radiación es $\alpha$.
- Existe generación interna de calor $q'''$, uniformemente distribuida.




$$\alpha G A_r^* + q''' V = (\bar{h}_c + \bar{h}_r) A (T - T_\infty) + \rho V c \frac{dT}{dt}$$

ci: T(t=0)=$T_0$

Cambio de variable:

$$\theta = T - T_\infty \quad \rightarrow \quad dt = d\theta$$

por tanto:

$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0$$

$$\text{ci:} \quad \theta(t=0) = T_0 - T_\infty = \theta_0$$

donde $a = \frac{\bar{h} A}{\rho V c}$ y $b = \frac{\alpha G A_r^* + q''' V}{\rho V c}$, y siendo $\bar{h} = \bar{h}_c + \bar{h}_r$. La ED puede resolverse sumando las soluciones homogénea y particular o bien eliminando la inhomogeneidad mediante la transformación:

$$\theta' = \theta - \frac{b}{a} \qquad d\theta = d\theta'$$

y, por tanto:

$$\frac{d\theta'}{dt} + a\theta' = 0$$

Separando variables e integrando entre *0* y *t*:

$$\ln \frac{\theta'}{\theta'_0} = -at$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$\frac{(T - T_\infty) - \frac{b}{a}}{(T_0 - T_\infty) - \frac{b}{a}} = e^{-at}$$

Y finalmente:

$$\frac{\left(T-T_\infty\right)-\dfrac{\alpha\, G A_r^* + q^{'''} V}{\bar{h}\, A}}{\left(T_0-T_\infty\right)-\dfrac{\alpha\, G A_r^* + q^{'''} V}{\bar{h}\, A}} = e^{-\frac{\bar{h}\, A}{\rho\, V\, c} t}$$

que se reduce a la ecuación $\frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty} = e^{-\frac{\bar{h}A}{\rho V c} t}$ cuando b=0, esto es, si no existe fuente de radiación puntual (G=0) ni generación interna ($q^{'''}$=0).

El número de Biot asociado a este proceso sería:

$$B_i = \frac{\left(\bar{h}_c + \bar{h}_r\right) L_c}{k}$$

donde $\bar{h}_r = \varepsilon\sigma\left(\bar{T}^2 + T_e^2\right)\left(\bar{T} + T_e\right)$. Y el l tiempo característico:

$$t_c = \frac{\rho\; Vc}{\left(\bar{h}_c + \bar{h}_r\right) A}$$

Caso 4:

- Existe convección con coeficiente medio $\bar{h}_c$ con un fluido a temperatura $T_\infty$. $A_c$ es el área de intercambio por convección.
- Existe intercambio radiativo con una superficie evolvente exterior a distinta temperatura $T_e$ que el fluido convectivo $T_\infty$. $A_r$ es el área del cuerpo de intercambio radiativo. La superficie radiante evolvente es mucho más grande que el cuerpo en cuestión.
- Ausencia de fuente de radiación puntual (G=0).
- Sin generación interna (q'''=0).
- Iguales áreas de convección y de radiación: $A_c$=$A_r$=A.

Llamando $\bar{h}_r = \varepsilon\,\sigma\left(\bar{T}^2 + T_e^2\right)\left(\bar{T} + T_e\right)$, la ecuación diferencial se puede expresar como:

$$\bar{h}_c\; A\left(T-T_\infty\right) + \bar{h}_r\; A\left(T-T_e\right) + \rho V\, c \frac{dT}{dt} = 0$$

cuya solución es:

$$\frac{\left(T-T_\infty\right) + \dfrac{\bar{h}_r}{\bar{h}_c + \bar{h}_r}\left(T_\infty - T_e\right)}{\left(T_0-T_\infty\right) + \dfrac{\bar{h}_r}{\bar{h}_c + \bar{h}_r}\left(T_\infty - T_e\right)} = e^{-\frac{\left(\bar{h}_c + \bar{h}_r\right) A}{\rho V c} t}$$

debiendo considerar Bi la convección y la radiación:

$$B_i = \frac{\left(\bar{h}_c + \bar{h}_r\right) L_C}{k}$$

con un tiempo característico:

$$t_c = \frac{\rho\ V\ c}{\left(\overline{h}_c + \overline{h}_r\right)A}$$

Cuando se utilizan valores medios de los coeficientes de convección $\overline{h}_c$ y de radiación $\overline{h}_r$ , las solución de la ecuación diferencial es sólo aproximada el transitorio del cuerpo, pero cuenta con la principal ventaja de que es válido para todo tipo de cuerpos, independientemente de su forma, lo que lo hace apropiado para cuerpos con forma irregular o compleja. Según esto, cuando no se hace uso de valores medios (ecuación 4), la solución es exacta. Finalmente, hay que indicar que dado que $h_c$ no varía considerablemente con la temperatura, una solución que sólo dependa de este valor medio, es una buena aproximación, que solo presenta una desviación algo mayor cuando se utiliza valor medio de $h_r$, esto es, $\overline{h}_r$ .

Existen soluciones analíticas exactas de transitorios de conducción para cuerpos de geometría sencilla (placas, cilindros y esferas por lo general) y con unas determinadas condiciones de contorno. Esto está fuera del programa de la asignatura.

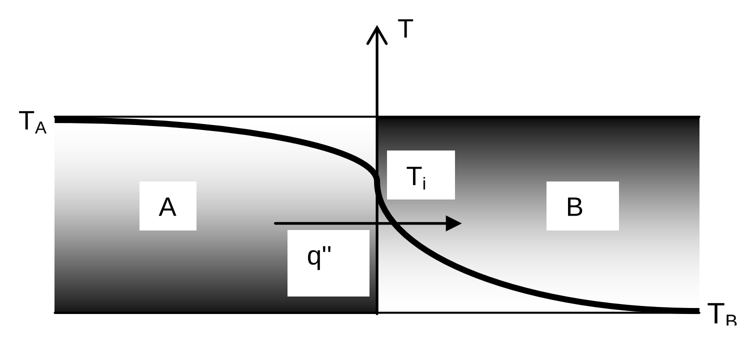
En el caso general de que el cuerpo estuviese sometido a la acción conjunta de de una fuente de radiación puntual, convección, intercambio de radiación con una superficie evolvente muy grande e incluso con generación interna de calor ($q'''$), la ecuación del Primer Principio quedaría como:

$$\alpha\, G\, A_r + q'''V = h_c A_c (T - T_\infty) + \varepsilon\, \sigma\, A_r \left(T^4 - T_e^4\right) + \rho V c \frac{dT}{dt}$$

ci: $T(t=0)=T_0$

que constituye una ecuación diferencial ordinaria no homogénea, de primer orden y no lineal que no puede integrase analíticamente, aunque sí numéricamente.

## 4. **CONDUCCIÓN TRANSITORIA: CONTACTO ENTRE SÓLIDOS SEMI-INFINITOS**




Distribución de temperaturas entre sólidos semi-infinitos.

Sean dos sólidos semi-infinitos, inicialmente a temperaturas uniformes $T_A$ y $T_B$, que se ponen en contacto en el instante t=0. Se puede demostrar que el flujo de calor a través de la superficie de unión está dado por la expresión:

$$q'' = \frac{k_A (T_A - T_i)}{\sqrt{\pi \alpha_A t}} = \frac{k_B (T_i - T_B)}{\sqrt{\pi \alpha_B t}}$$

de donde:

$$\frac{T_A - T_i}{T_i - T_B} = \frac{k_B}{k_A} \left( \frac{\alpha_A}{\alpha_B} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{(k\rho c)_B}{(k\rho c)_A}}$$

o bien como $\alpha = \dfrac{k}{\rho c}$ (k conductividad, ρ densidad, c calor específico):

$$T_i = \frac{T_A \sqrt{(k\rho c)_A} + T_B \sqrt{(k\rho c)_B}}{\sqrt{(k\rho c)_A} + \sqrt{(k\rho c)_B}}$$

Puede observarse como la temperatura $T_i$ de la unión no depende del tiempo, por lo que permanece constante mientras los cuerpos están en contacto, estando $T_i$ tanto más próxima al cuerpo de mayor kρc. Esto justifica la "sensación de más o menos frío" cuando tocamos distintas sustancias a menor temperatura que nuestra temperatura superficial ($T_{piel}$=34ºC y $T_{cuerpos}$=10ºC, por ejemplo):

| | | | |
|---|---|---|---|
| a. Tierra seca: | kρc~$2,8\cdot10^6$ | $kg^2/s^5$-$K^2$ | $T_i$=21,7 ºC |
| b. Corcho: | ~$1,2\cdot10^4$ | " | $T_i$=32,4 ºC |
| c. Madera: | ~$6,9\cdot10^5$ | " | $T_i$=25,7 ºC |
| d. Acero: | ~$2,8\cdot10^8$ | " | $T_i$=12,1 ºC |
| e. Cuerpo humano (≈agua): | ~$2,5\cdot10^6$ | " | |

La sensación de frío aumenta en el sentido: b, c, a, d (*b* parece el menos frío y *d* el que más). En caso que tocásemos estas sustancias con mayor temperatura que la corporal, *b* parecería el menos caliente y *d* el que más. En general, el producto kρc es elevado en los metales y pequeño en los materiales aislantes, por lo que la sensación térmica (de frío o calor) es considerablemente mayor en los primeros.

## Bibliografía

Incropera, Frank P.; DeWitt, David P. *Fundamentos de Transferencia de Calor.* Ed. Pearson.

Kreith, Frank; Bohn, Mark S. *Principios de Transferencia de Calor*. Thomsom Learning.

Nellis, Gregory; Klein, Sanford. *Heat Transfer*. Cambridge University Press.

**CUADERNO**




Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

